Révision

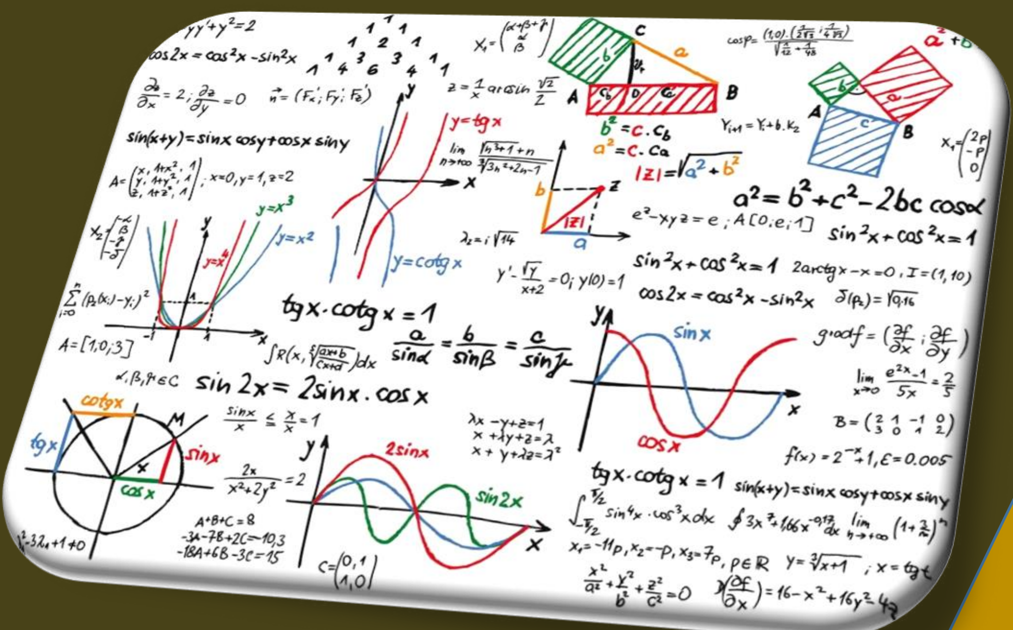
2017/2018

Mathématiques

BAC Maths

Prof : Habib Haj Salem

Lycée Pilote Médenine



Révision Mathématique

Auteur : Habib Haj Salem

Section : Bac Mathématiques

" Tu as droit au succès et tu as droit au bonheur. Tu le mérites !

Cherry Blossom

Table de matière

"نحن هنا لكي نضع بصمتنا في هذا الكون، وإلا ما فائدة مجيئنا إليه؟!!

" ستيف جوبز"

Partie 01

Nombres Complexes

Exercice 1 : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation: (E) : $(1-i)z^2 - 2(\cos\theta + \sin\theta)z + 1 + i = 0$ où θ est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$. On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $\operatorname{Im}(z_1) > 0$, pour tous les réels θ.

1) a) Sans calculer z_1 et z_2, montrer que $z_2 = \frac{i}{z_1}$.

b) Trouver alors une relation entre les modules et les arguments de z_1 et z_2.

2) a) Déterminer z_1 et z_2. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b) Préciser la valeur de θ pour que $z_1 = z_2$.

Exercice 2:

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)z + 2i = 0$

II) Soit θ un paramètre réel au quel on associe l'équation : $(E_\theta) : z^2 - 2e^{i\theta}z + 2e^{2i\theta} = 0$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ). On note z_1 et z_2 les deux solutions .

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle .

2) Soient M_1 et M_2 les points images respectifs de z_1 et z_2 dans le plan complexe.

a) Calculer $\operatorname{Arg}(\frac{z_1}{z_2})$. En déduire une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2}\right)$.

b) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3:

P désigne le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, α un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$ et ζ le cercle de centre B et de rayon 1.

I) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - i(2 - e^{i\alpha})z + e^{i\alpha} - 1 = 0$

2) Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation

II) Soit f l'application de P\{B} vers P\{A} qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}$

1) a) Montrer que f n'a aucun point invariant.

b) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a $z' - 1 = \frac{-2i}{\bar{z} + i}$

c) En déduire que $\forall M \in$ P\{B} , on a : AM'.BM= 2 et $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) Construire le point M' à l'aide d'un point M du cercle ζ.

2) Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $\left(\bar{z} - i\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)(\bar{z} + i)^3$

a) Montrer que si z est une solution de E alors z est réel.

b) Montrer que si $z' = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = -\cot g(\frac{\alpha}{2})$

c) Résoudre alors l'équation (E).

d) Utiliser ce qui précède pour construire le point Ω antécédent par f du point Ω' d'affixe $\omega'=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4(bac 2013)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i. On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1. Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$, M le point d'affixe $1+e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1+e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)$ et $\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)$

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $\left[0,2\pi\right[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2.

c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_p telle que $Z_P=\left(1-i\right)\sin\theta.e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)}=\sin\theta-\cos\theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 :

1) Soit θ un réel appartenant a $\left]0,\pi\right[$. On considère l`équation (E_θ) : $z^2-2z-2i\sin\theta e^{i\theta}=0$

On note z_1 et z_2 les solutions de (E_θ) .

a- Sans calculer z_1 et z_2, montrer que $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\theta-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

b – Résoudre dans IC l équation (E_θ) .

2)-Le plan complexe étant rapporte a un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$,on désigne par A,M et N les points d`affixes respectives : $z_A=2$. $z_M=1-e^{i\theta}$ et $z_N=1+e^{i\theta}$.

a- Ecrire z_M et z_N sous forme exponentielle.

b- Déterminer l` ensemble des points M lorsque θ varie dans $\left]0,\pi\right[$.

c- Donner la nature du quadrilatère OMAN .

d- Trouver θ sachant que le quadrilatère OMAN est un carré

Exercice 6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ .On note A le point d'affixe - 2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$

1) Montrer que si $\alpha\in IR^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à IR.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors a est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha=1+i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\overline{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 7 :

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-2z+4=0$.

b- Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Justifier que N a pour $2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F)=K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour la quelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 8 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u}\ ,\vec{v})$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z}{\overline{z}}$ soit réel.

2) On considère les points M, N et Q d'affixes respectives, z, $\overline{z}$ et $\frac{z^2}{\overline{z}}$

a) Vérifier que $\frac{z_Q - z_M}{z_N - z_M} = -\ \frac{z}{\overline{z}}$

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que M, N et Q soient alignés

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2i\,z - (1-e^{2i\theta}) = 0$ ou' $\theta \in\ ]0\,,\pi[$

4) On pose M d'affixe $z = i\,(1-\ e^{i\theta})$

a) Ecrire z sous la forme exponentielle

b) Déterminer en fonction de θ, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MN}\ ,\overrightarrow{MQ})$.

c) Déterminer alors θ pour que le triangle MNQ soit équilatéral

Exercice 9 :

1. a)Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = -i$

   b) En déduire les solutions de l'équation $z^3 + i(1-z)^3 = 0$

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (2i-1)z - i = 0$

3. a)Factoriser $z^3 + i(1-z)^3$

b) En déduire que $z^3 + i(1-z)^3 = 0$ équivaut à $z = \frac{1}{2}(1+i)$ ou $z^2 + (2i-1)z - i = 0$

c) Retrouver les solutions de $z^3 + i(1-z)^3 = 0$

4. Soit a une solution de $z^3 + i(1-z)^3 = 0$ on pose a $= re^{i\alpha}$ avec r>0 et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

   a)Montrer que $|a| = |1-a|$ *puis* $r = \frac{1}{2\cos(\alpha)}$

   b) Montrer que $r^3e^{i3\alpha} + ir^3e^{-3i\alpha} = 0$ .En déduire les valeurs possibles de α.

   c) Déduire la forme exponentielle des solutions de l'équation $z^3 + i(1-z)^3 = 0$

Exercice 10:

1 .a. Vérifier que $1 - i\sqrt{3}$ est une racine carrée de $-2 - 2i\sqrt{3}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E : z^2 - \; 3 + i\sqrt{3} \; z + 2 \; 1 + i\sqrt{3} \; = 0$

c. Donner les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2. On désigne par A, B et B' les points d'affixes respectives 2, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{b}$.

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2 le point M d'affixe $z = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in \; -\pi, \pi$.

a. Construire les points A, B, B' et le point M' d'affixe $z' = 2e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$

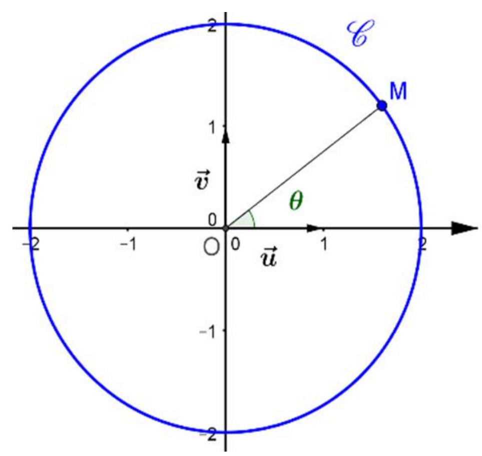
b. Montrer que $z' = \dfrac{b}{2}z$

3. On désigne par K et K' les milieux respectifs de $[BM]$ et $[B'M']$.

a. Vérifier que $z_{K'} = \dfrac{2\overline{b} + bz}{4}$

Montrer que : $b^2 - 4b = 2\overline{b} - 8$ et que $z_{K'} - 2 = \dfrac{b}{2} \; z_K - 2$

c. En déduire que lorsque M varie sur le cercle $\mathscr{C}$, la médiatrice de $[KK']$ passe par un point fixe que l'on précisera.



Partie 02

Arithmétique

Exercice 1 :

1) Vérifier que : $13^6 \equiv 1 \pmod 7$

2) En déduire le reste modulo 7 de l'entier 13^{2018} .

3) Soit n un entier, on pose a = 2n-3 et b = 3n-1.

a- Montrer que tout diviseur commun de a et b , divise 7.

b- En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$

c- Pour quelles valeurs de n, a-t-on $a \wedge b = 7$.

4) Pour $a = 2.13^{2018} - 3$ et $b = 3.13^{2018} - 1$. Trouver $a \wedge b$.

Exercice 2:

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2 \text{ , pour } n \in IN \end{cases}$

1°) a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 , et u_4 .

b) Que peut-on dire à propos des deux derniers chiffres du terme u_n ?

c) Montrer, par récurrence, que pour tout entier n, $u_n \equiv 13\,[50]$.

d)En déduire les deux derniers chiffres du terme u_n .

2°) Montrer que pour tout entier n ; u_n et u_{n+1} sont des entiers premiers entre eux.

Exercice 3:

On considère l'équation dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, (E) : 36x -25y =5 où (x,y) est le couple d'inconnues.

1) a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E') : 36x-25y=1

b)En déduire un couple (x_0, y_0) , solution particulière de E .

c) Résoudre alors E dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$.

2) Soit (x,y) un couple solution de E et $d = x \wedge y$

a) Montrer que d=1 ou d=5.

b) Déterminer les couples (x,y) , solutions de (E) tels que x et y soient premiers entre eux.

Exercice 4 :

On considère l'équation (E) : 8x + 5y = 1 où x et y sont des entiers relatifs.

1) a) Citer le théorème permettant d'affirmer que l'équation (E) a des solutions.

b) Donner une solution particulière de (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: (S) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 8 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$

b) Dans le cas où x est un entier solution de (S), déterminer le reste de la division euclidienne de x par 40.

3) On considère l'équation (E') : 8x + 5y = 100.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E').

b) Un groupe de garçons et de filles a dépensé 100 dinars dans une excursion. Chaque garçon a dépensé 8 dinars et chaque fille a dépensée 5 dinars. Donner les répartitions des groupes possibles.

Exercice 5 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 \equiv 8\ [41]$

b) Etablir l'équivalence : $x^2 - 19x - 10 \equiv 0 \pmod{41} \Leftrightarrow (x + 11)^2 \equiv 8 \pmod{41}$.

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $x^2 - 19x - 10 \equiv 0 \pmod{41}$.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7.

3) a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste modulo 7 de 2^n.

b) En déduire que si n n'est pas un multiple de 3 alors $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7.

Exercice 6 :

1) Soit $n \in IN$, déterminer suivant les valeurs de n le reste modulo 13 de 5^n.

2) Pour tout entier naturel n , on pose $A_n = 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$

a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 13 de A_n .

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers naturels n tels que $A_n \equiv -1 (\text{mod} 13)$.

3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que : $(25)^n + (8)^n + (2007)^n \equiv -1\ (\text{mod} 13)$

Exercice 7 :

1) On considère dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, l'équation E : $11x + 8y = 3$.

a) Soit (x, y) une solution de E , quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$.

b) Montrer que les solutions de E sont les couples (x,y) tels que $x = -8k+1$ et $y = 11k-1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

En déduire l'ensemble des entiers , tel que $x \wedge y = 3$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, l'équation E' : $11x + 8y = 79$.

a) Déterminer l'inverse de 8 modulo 11

En déduire que si (x, y) est une solution de E' alors $y \equiv 3 \pmod{11}$.

b) Résoudre alors l'équation E'.

3) Déterminer le reste modulo 11 de 8^{10} ;En déduire que $8^9 \equiv 7 \pmod{11}$ que 8^{2019}-7 est divisible par

Exercice 8 (bac 2014 contr)

1) Soit dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $1111\,x - 10^4 y = 1$.

a) Vérifier que (- 9, -1) est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E) .

2) Soit n un entier.

a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 1 + q10^4$ alors (p, q) est une solution de (E).

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice 9:

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x - 13y = 9$

(a) Vérifier que (2,1) est une solution de (E),

(b) Résoudre (E).

2. n est un entier. Montrer que $\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{11} \\ n \equiv 9 \pmod{13} \end{cases}$ si et seulement si $n \equiv 22 \pmod{143}$

3. (a) Vérifier que $55^{143} \equiv 9 \pmod{13}$.

(b) Déterminer le reste de 55^{143} modulo 143.

Exercice 10 :

1) Soit $x \in \mathbb{Z}$

a) Déterminer les restes modulo 7 de x^2.

b) Résoudre dans $\in \mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{7}$

2) Soit n un entier naturel

a) Déterminer suivant n le reste modulo 7 de 2^n

b) Déterminer le reste modulo 7 de l'entier 107^{2009}

c) Déterminer les entiers naturels n tel que $107^n + 107^{2n} + 107^{3n}$ soit divisible par 7

3) Soit a un entier naturel non divisible par 7

On désigne par k le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{7}$

a) Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifier $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.

b) Quelle sont les valeurs possible de k.

4) A tout entier n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

Montrer $A_{2012} \equiv 6 \pmod{7}$

Exercice 12:

1) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2)Pour tout entier naturel n on pose $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 \ldots\ldots + 5^n$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $4S_n = 5^{n+1} - 1$

b) Soit a un entier, montrer que $4S_n \equiv a \pmod{7}$ si et seulement si $S_n \equiv 2a \pmod{7}$

c) Déterminer tous les entiers naturels n tels que S_n soit divisible par 7 .

3) Soit n un entier naturel non nul donné

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $5^n x + S_n y = 1$

a) Justifier que (E) admet au mois une solution

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

Partie 03

Probabilité et statistique

Exercice 1 : Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux blanches et trois noires.

1) On extrait au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A « tirer deux boules blanches »

B « tirer deux boules de la même couleur »

b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance E(X) de X.

2) On effectue maintenant un tirage de deux boules de la façon suivante :
On tire une première boule de l'urne , on note sa couleur , on la remet dans l'urne et on ajoute une autre boule de la même couleur que la boule tirée. On tire ensuite une seconde boule.

On note B_1 : « tirer une boule blanche au premier tirage »

B_2 : « tirer une boule blanche au deuxième tirage »

a) Calculer $p(B_1)$, $p(B_2/B_1)$ et $p\left(B_2/\overline{B_1}\right)$

b) En déduire que $p(B_2)=\frac{2}{5}$

c) Calculer la probabilité de tirer une boule noire au second tirage.

d) A la fin de l'épreuve, on a su qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule noire au premier tirage ?

3) On remet l'urne dans son état d'origine : contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.
On répète l'épreuve de la question 2) n fois de suite ($n \geq 2$) de façon indépendante et dans les même conditions , en remettant après chaque épreuve dans son état original .On note Z la variable aléatoire égale aux nombres de réalisation de l'évènement B_2 .

a) Exprimer $p(Z=4)$ en fonction de n.

b) Donner E(Z) et $\sigma(Z)$.

c) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement B_2 ?

d) Déterminer le plus petit entier n pour que $p_n \geq 0{,}99$

Exercice 2 :

Un responsable d'un magasin achète des MP5 auprès de deux fournisseurs F_1 et F_2 dont 25% du fournisseur F_1.

La proportion des MP5 du deuxième choix est de 2 % chez le fournisseur F_1 et de 4 % chez le second. On considère les événements :

D : " Le MP5 est du deuxième choix"

F_1 : " le MP5 provient du fournisseur F_1 "

F_2 : " le MP5 provient du fournisseur F_2 "

1) a. Donner un arbre pondéré .

b. Calculer $P(D \cap F_1)$ puis démontrer que $P(D) = 0{,}035$.

c. Un MP5 est du deuxième choix. Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

2) Le responsable commande 20 MP5, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient

du deuxième choix.

3) Le responsable achète le MP_5 du premier fournisseur à 80 dinars et du second à 72^D et il vent le MP_5 à 125^D s'il est du premier choix et à 15^D si non .

On désigne par X la variable aléatoire qui a chaque MP_5 vendu associe le gain algébrique en dinars réalisé par le responsable .

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Calculer l'espérance mathématique de X . Donner une interprétation de ce résultat .

4) La durée de vie en mois d'un MP_5 est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

a. La probabilité qu'un MP_5 dépasse 5 mois de durée de vie est 0, 325. Déterminer λ . On prend dans la suite $\lambda = 0{,}225$.

b. Quelle est la probabilité qu'un MP_5 dure moins de 8 mois ?

c. Quelle est la probabilité qu'un MP_5 dure au plus 2 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 mois.

Exercice 3 :

Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé .

Pour t appartenant à [0 ;30] , on note y(t) le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc y(0)=0,01.

On admet que la fonction y ainsi définie sur [0,30] est dérivable , strictement positive et vérifie

$y' = 0{,}05y(10-y)$.

1) On considère la fonction z définie sur [0 ;30] par $z=\dfrac{1}{y}$ .Démontrer que :

y satisfait aux conditions y(0)=0,01 et $y' = 0{,}05y(10-y)$ si et seulement si z satisfait aux conditions z(0)=100 et $z' = -0{,}5\,z + 0{,}05$.

2) a) En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche .

3) le quart de la population est vaccinée contre cette maladie contagieuse .De plus , on estime que sur la population vaccinée , 92% des individus ne tombent pas malades .Sur la population totale on estime aussi que 10% des individus sont malades .On choisit au hasard un individu de cette population.

a) Montrer que la probabilité de l'évènement A : « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.

b) Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Exercice 4

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher

- U_1 contient k boules blanches (k un entier naturel supérieur ou égal a 1)et trois boules noires.
- U_2 contient deux boules blanches et une boule noire..

On tire une boule au hasard dans U_1et on la place dans U_2.On tire ensuite au hasard une boule dans U_2.

On note *B_1(respectivement N_1)l'événement « on a tire une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 »

*B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tire une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 »

1) a) Calculer $p(N_2 / B_1)$, $p(B_2 / B_1)$, $p(N_2 / N_1)$ et $p(B_2 / N_1)$

b) Montrer que la probabilité de l'événement B_2 égale a $\dfrac{3k+6}{4k+12}$

2) Dans cette question on prend k = 12.
3) Un joueur mise 8 dinars et effectue une épreuve Si a la fin de l'épreuve le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne le joueur reçoit 12 dinars .Si non il ne reçoit rien et perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a) Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et - 8. .
b) Déterminer la loi de probabilité de X .
c) Calculer l'espérance mathématique de X ainsi que sa variance.
d) Le jeu est il favorable au joueur.

Exercice **5**

Dans une classe de **30** élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de **10** membres, le club théâtre de **6** membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard On appelle :

- **P** l'événement « l'élève fait partie du club photo »
- **T** l'événement « l'élève fait partie du club théâtre »

Montrer que les événements **P** et **T** sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les **10** membres sont tous présents.

Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort. On appelle :

* T_1 l'événement : « le premier élève appartient au club théâtre »

• T_2 l'événement : « l'élève pris en photo appartient au club théâtre »

(a) Copier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

(b) Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est **0,**2.

3, Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite. Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 6 :

Une machine est achetée à 3000 dinars. Le prix de revente y, exprimé en dinars, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3000	2400	1920	1536	1229	983

Ajustement affine

1). Représenter le nuage de points associé à la série statistique (xi; yi) dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 200 dinars sur l'axe des ordonnées.

2). Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation.

3). Donner une équation de la droite de régression D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
Représenter la droite D dans le repère précédent.

Ajustement non affine

On pose z = ln (y) Montrer qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par
$Z = - 0,22\,x + 8,01$.

1) Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $A^x \times B$ où A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité près.

2) Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 dinars.

3)- Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 dinars.
Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? On argumentera la réponse

Exercice 7 :

On appelle capacité vitale chez l'homme , le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée.
Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale C, exprimée en cm^3 , chez les hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille t exprimée en cm.

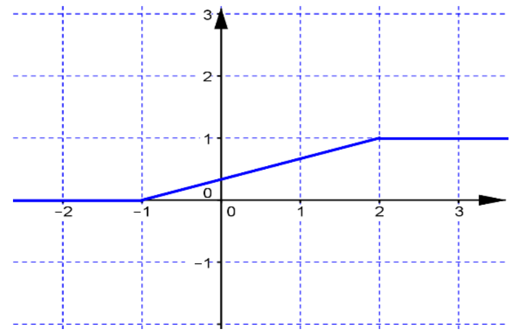
t (en cm)	152	156	160	166	170	174	178	180	182
C (en cm^3)	3525	3620	3710	3850	3945	4035	4130	4175	4220

1) a) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation linéaire entre t et C.
   b) justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (t,C).
   a) Donner une équation de la droite de régression de C en t. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} prés) .
   b) Déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme agé de 40 ans et de taille égale à 188 cm
2) En fait, la capacité vitale C (exprimée en cm^3) chez l'homme dépend de sa taille t (exprimée en années).
   De nombreuses expériences ont permis d'exprimer C en fonction de t et g selon la relation
   (R) : C $C = \alpha t + \beta g + 754$ où α et β sont des constantes (ne dépendent pas de t et g).
   a) Donner l'expression de C pour g40.
   b) En déduire , e, utilisant 1/ c) , les valeurs de α et β.
3) Estimer la capacité vitale d'un homme agé de 50ans et mesurant 188cm.

Exercice 8 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer la bonne réponse.

Question 2 : Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi uniforme, sa fonction de répartition est donnée ci-contre :



1°) La densité de X est la fonction f définie sur [-1, 2] par $f(x)$ =

a) $\frac{1}{3}$ **b)** 3 **c)** $-\frac{1}{3}$.

2°) $P(X<1 / X<0)=$

a) $1-e^{-1}$ **b)** 1 **c)** 0.

3°) On considère l'inéquation (E) : $3^x \geq 1$, on choisit au hasard un réel x dans [-1, 2]. La probabilité d'avoir x solution de (E) est égale à :

a) 0 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$.

Question 3 : Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=2$.

Soit n un entier naturel. On pose $u_n=P\left(\frac{n}{10} \leq X \leq \frac{n+1}{10}\right)$, (u_n) est une suite géométrique de raison q =

a) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

3:

Pour tout $n \in IN^*$, $(2n^2+n) \wedge (2n)=$

a) n **b)** 2n **c)** 2n + 1.

Question 4 :

Soit F la fonction définie sur]0, + ∞[par F(x) = $\int_1^{\ln x}\left(x^{\frac{3}{2}} t e^{-t}\right) dt$

La dérivée de F sur]0, + ∞[est définie par F ′ (x) =

a) $\frac{(\ln x)^{\frac{5}{2}}}{x}$ **b)** $\sqrt{x}\left[\frac{3}{2} \int_1^{\ln x}\left(t e^{-t}\right) dt+\frac{\ln x}{x}\right]$ **c)** $x^{\frac{5}{2}} e^{-x}$.

Partie 04

Isométries et similitudes

Exercice 1:

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1. Soit f est un déplacement, g antidéplacement tels que f(A) = B et g (B) = A avec $A \neq B$. Alors gof est une :
   a) symétrie glissante **b)** symétrie orthogonale **c)** translation.
2. Soit **f** l'application du plan complexe qui à $M(z)$ associe le point $M(i\bar{z})$, alors **f** est une
   a. similitude indirecte de rapport 2 **b.** symétrie orthogonale d'axe y =x **c.** symétrie orthogonale d'axe y =-x
3. Soit f un point du plan et la similitude $\mathbf{f} = R_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)} o h_{(I,-3)}$ Alors la forme réduire de **f** est :
   a) $R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} o h_{(I,3)}$ **b)** $R_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)} o h_{(I,3)}$ **c)** $R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} o h_{(I,-3)}$
4. Soit σ la similitude indirecte dont la forme complexe est $z' = 2i\bar{z}$:, alors une équation cartésienne de son axe est :
   a) $y = x + 1$. **b)** y = -x+1 **c) y = x**

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I et de sens direct. On désigne par J et K les milieux respectifs des côtés [AD] et [CD], soit E le point du plan tel que DBE soit un triangle équilatéral de sens direct

1/ On pose : $\Psi = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$

a) Déterminer Ψ (A) et Ψ (D).

b) En déduire que Ψ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

2/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoi B sur A et A sur D.

b) Caractériser R.

3/ On pose $g = R_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)} o R_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4/ Soit $r = R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$ et on pose $t = g \circ r^{-1}$.

a) Déterminer t(A) puis caractériser t.

b) Pour tout M du plan P, on pose $M_1 = r(M)$ et $M_2 = g(M)$. Quelle est la nature du quadrilatère ABM_2M_1

Exercice 3 :

Dans un plan orienté, on donne un triangle équilatéral direct BCD. On désigne par I le centre de gravité de BCD

et par A le symétrique de I par rapport à la droite (BD)

Soit s la similitude directe qui envoie A sur B et B sur C.

1. a) Montrer que le rapport de s est $\sqrt{3}$ et qu'un angle de s est $\frac{\pi}{2}$

   b) Prouver que S(I) = D.
2. On désigne par J le milieu du segment [AI]. Déterminer S(J). En déduire le centre de s.
3. On considère l'application $\sigma = S o S o S_{(BD)}$.

a) Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) Déterminer σ (J) et σ (I) . c) En déduire le centre et l'axe de σ .

Exercice4:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on donne les points A et B d'affixes respectives -1 et i. Soit f : $\begin{array}{c} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{array}$ tel que $z' = (1+i)z + i$

1. (a) Déterminer la nature de **f** et préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Soit M un point distinct de A. Montrer que AMM' est rectangle isocèle en M.
2. On pose $M_0 = 0$ et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.
   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = (1+i)^n - 1$.
   (b) Montrer l'équivalence O, A, M_n sont alignés $\Leftrightarrow$ n est un multiple de 4.

Exercice5:

Le plan est rapporté à un repère-orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Soit f la similitude in directe qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -2i\bar{z} + 2i + 1$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Déterminer le rapport de f.
2. (a) Montrer que **f** admet un seul point invariant, on le note I. Calculer son affixe.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$.
   En déduire une équation de l'axe de **f**.
3. On pose M_0 le point d'affixe 2 et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. Soit z_n l'affixe de M_n.
   (a) Caractériser **fof**.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_{2n} = 4^n + 1$ *et* $Z_{2n+1} = 1 - 2 \times 4^n i$.

Exercice 6 :

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2OC et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

La perpendiculaire à (OB) passant par B coupe la droite (OA) en J et la droite (OC) en J'.

A/ 1) Soit f la similitude directe qui envoie J en O et O en J'.

a) Déterminer l'angle de f.

b) Déterminer f(B) et en déduire le centre et le rapport de f.

2) Soit g la similitude indirecte qui envoie J en O et O en J'.

a) Donner le rapport de g.

b) En déduire que g admet un unique point invariant que l'on notera I.

c) Déterminer gog(J) et en déduire que I appartient à (JJ').

d) Construire le centre I et l'axe Δ de g.

B/ On rapporte le plan complexe au repère orthonormé $\left(O,\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$

1) Montrer que les points J et J ont pour affixes respectives $\frac{5}{2}$ et 5i.

2) Donner la transformation complexe associée à f.

3) a) Donner la transformation complexe associée à g.

b) En déduire l'affixe du point I, centre de g.

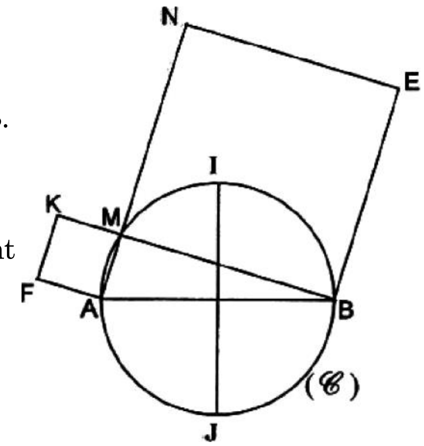
c) Déterminer une équation de l'axe Δ de g.

Exercice 7 (bac 2010 princ) :

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, [AB] et [IJ] sont deux diamètres perpendiculaires du cercle (C), M est un point variable du cercle (C) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

[et MBEN et MKFA sont des carrés de sens direct.



1) Montrer que les points E, F et M sont alignés.

2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B.

a) Montrer que $r_1 o r_2$ est la symétrie centrale de centre I.
Déterminer r_2 (E). En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point

3) Soit S la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

a) Déterminer S (M).
b) Construire le point G image de F par S.
c) Montrer que F est le milieu du segment [KG].
d) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P. Construire P.

Exercice 8 :

Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I le symétrique de C par rapport a D, J = A* I et (C) le cercle circonscrit au carré ABCD. On désigne par R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1/ Soit f la similitude directe de centre C et telle que f (D) = A.
a) Préciser le rapport et l'angle de f.
b) Vérifier alors que f (O) = B.

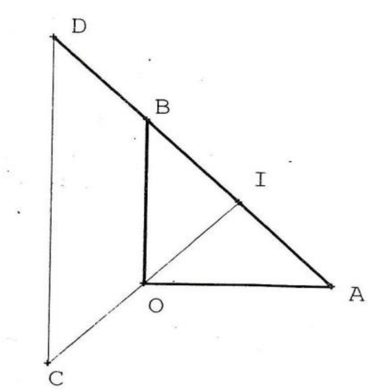
2/ On note $g = t_{\overrightarrow{CD}} \circ f \circ R$.
a) préciser g (A) et g (J).
b) Montrer que g est une similitude directe dont-on précisera le rapport et l'angle.
c) Soit Ω le centre de g. Montrer que $\Omega \in$ (C)

3/ a) Caractériser $g \circ g$, en déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega D}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
b) Trouver alors une construction géométrique de Ω.

4/ Soit σ la similitude indirecte définie par $\sigma = g \circ S_{(AJ)}$ et K = S_J (D).
a) Déterminer $\sigma\circ\sigma$ (J), et montrer que $\sigma\circ\sigma$ est une homothétie dont-on précisera le rapport.
Vérifier que K est le centre de $\sigma\circ\sigma$.
b) Déterminer alors les éléments caractéristiques de σ.

Exercice 9 (BAC 2008 prin)

Le plane est orienté dans le sens direct.
Dans I 'annexe c ci-jointe (Figure2 page3), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que OA = OB et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.



On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.
Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C .

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) Montrer que O est I 'orthocentre du triangle ACD.
b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur(AC).

Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la Similitude f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D .

a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC) . En déduire g(O).

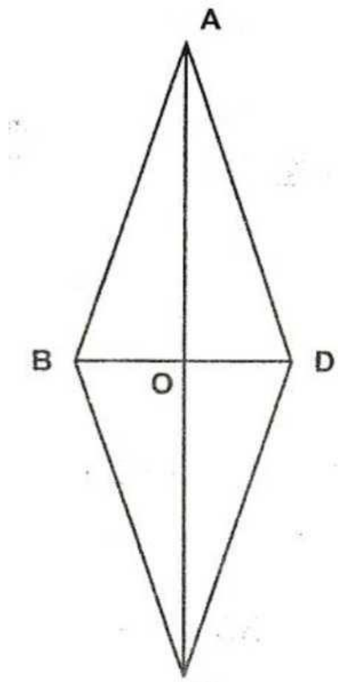
b) Déterminer les images de C et D par gof^{-1} . En déduire la nature de gof^{-1} .

4) Soit I'= f(I) et J'= g(J)

a) Déterminer les images des points J et I ' par gof^{-1}.

b) Montrer que les droites (I J), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Exercice 10 (bac 2014 princ) :



Le plan est orienté dans le sens direct .

Dans la figure ci contre ABCD est un losange de centre O tel que

$\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{}\,\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AC = 3BD

1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que O est le centre de f.

2) a) Soit D' l'image de D par f.

3) Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que OA = 90D'.

b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que BB'DD' est un losange.

Soit g = f o S (AC). c

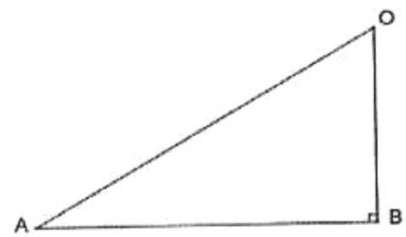
a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q. Montrer que MQ = 3 NP

Exercice 11(bac 2013 princ) :



Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

A) Soit f ta similitude directe de centre O qui envoie B en A.

Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est 2.

1) Soit C l'image de A par f.

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que AC =2AB.

b) Placer le point C.

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C. On note Ω le centre de g.

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C}=4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Placer le point Ω .

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{\Omega B}$;puis montrer que G est le milieu du segment [Ω H].

c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

Exercice 12 (bac 2014 ctr)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [Bl], OA=2OI et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .Soit h l 'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Determiner h(O) et S(I).
2) Pour tout point M du plan , on note P son image par h et Q son image par s.

Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

a) Soit 0' = f(0). Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.

b) Soit I'=f(I) .Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I'.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.

a) Exprimer en fonction de z l'affixe Z_P du point P.

b) Exprimer en fonction de z l'affixe Z_Q du point Q.

c) Soit z' l'affixe du point M' = f (M). Montrer que $z' = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$

d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [Ol].

Exercice 13 :

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On note D le symétrique de A par rapport à C.

On désigne par S la similitude directe transformant D en C et C en B.

1) Déterminer le rapport et l'angle de S.

2) On appelle Ω le centre de S. Montrer que $DC^2 = \Omega D^2$ et en déduire la nature du triangle ΩDC.

3) On pose $\sigma = SoS$

a) Quelle est la nature de la transformation σ .Préciser ses éléments caractéristiques

b) Déterminer l'image du point D par la transformation σ

c) Montrer que le quadrilatère $AD\Omega B$ est un rectangle

4) Dans cette question le plan complexe rapporte à un repère orthonormé direct $\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$, choisi de manière à ce que les points A , B , C et D aient pour affixes respectives 0 , 1 , i et 2i

a) Montrer que l'écriture complexe de la similitude S est : $z' = (1+i)z + 2 - i$ ou z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par S

b) Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x , y ,x' et y' étant des réels).Vérifier que : $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

c) Soit J le point d'affixe $1+3i$

Existe –t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AJ}=0$ ou M' désigne l'image de M par S

Exercice 14 :

Dans un plan orienté , on considère un triangle ABC rectangle en B et tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par O le milieu de [AC], I le milieu de [OA] et J le milieu de [AB].

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R(A) = O et R(B) = C .
2. (a) Montrer que R est une rotation dont-on déterminera son angle . Construire son centre D .
   (b) Montrer que le quadrilatère ABOD est un losange .
3. On pose f = $Rot_{\overrightarrow{BA}}$
   (a) Déterminer f(B) .
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
4. Soient M , M' et M" les points du plan tels que R(M') = M et f(M) = M" .
   (a) Montrer que si M est distinct de A et D , alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MM''}}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}+\left(\widehat{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$
   (b) On suppose que MM'M" est un triangle rectangle en M de sens direct . Montrer que M varie sur un cercle à préciser .
5. Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O .

(a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques .

(b) Montrer que φ (O) = D .

(c) Soit E = φ (D) . Montrer que E et B sont symétriques par rapport à O .

Exercice 15 :

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, ABC est un triangle direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$. Les points I , J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues.

respectivement des sommets A, B et C. Le point E est le milieu du segment [AC].

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

On note Δ est la médiatrice du segment [IE] et on pose f = SoS_{Δ} .

a) Montrer que S(I) = B. En déduire que f (E) = B.

b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

c) Caractériser fof. En déduire que f(B) = C.

d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK). En déduire que f (J) = K.

3) Soit g la similitude indirecte telle que g(C) = A et g(K) = I.

a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g.

a) On pose D = g(A). Montrer que le point D appartient à la droite (Bl).

c) Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ .Construire alors le point D.

4) On pose $\varphi=gof$.

a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer φ (A) et φ (B).

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.

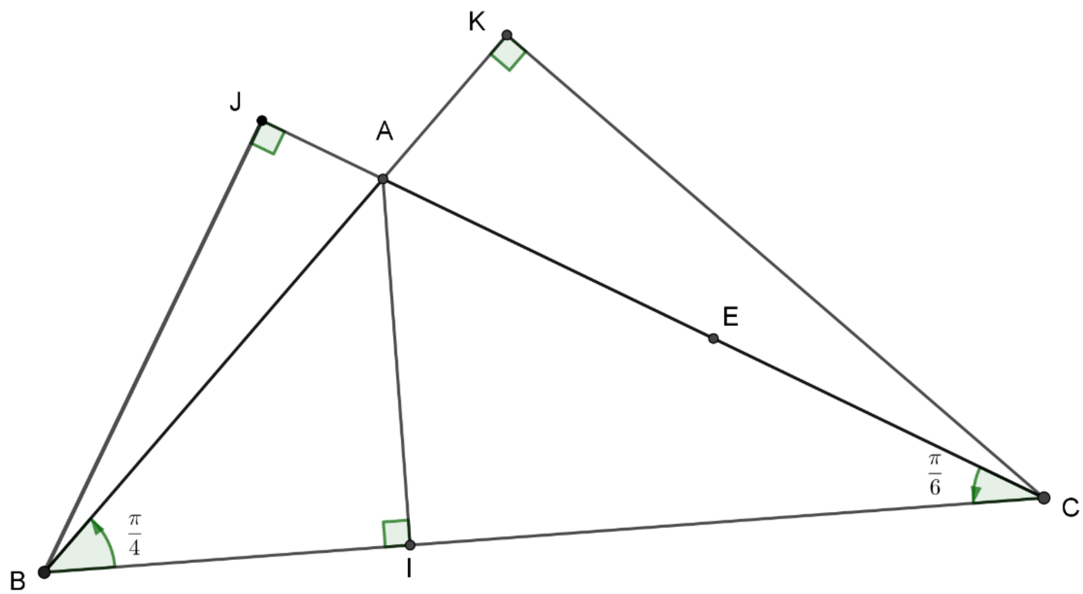
5) Soit Ω le centre de φ.

a) Vérifier que $D = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$ (E). En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) On pose $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$ (J). Montrer les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

c) Vérifier que $F = \varphi \circ \varphi$ (I). En remarquant que $IB = IE$,
montrer que $FD = FA$.

d) Construire le point F.
En déduire une construction du point Ω.



Partie 05

Suites réelles

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{k}{e^k}=-\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{3}{e^3}+............+(-1)^n\frac{n}{e^n}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a , (2n+2)-e(2n+1)<0.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $u_{2n+2}-u_{2n}=\frac{1}{e^{2n+2}}\left[(2n+2)-e(2n+1)\right]$

en déduire que la suite $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.

2) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante .

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $u_{2n}>u_{2n+1}$

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_{2n+1})$

4) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel α et que $u_3<\alpha<u_2$

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle (E) : $y'=2y-4y^2$.

1) On pose $z=\frac{1}{y}$.

a) Montrer que
y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de l'équation différentielle (E ') : $z'=4-2z$.

b) Résoudre l'équation différentielle E'.

c) Déterminer la solution de f de E tel que $f(0)=\frac{1}{3}$

2) On désigne par (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Vérifier que pour tout réel x >0 , $4f^2(x)=2f(x)-f'(x)$.

b) Calculer $\int_0^{\ln 2}f(x)dx$.

c) Déduire le volume V du solide engendré par la rotation , autour de l'axe des abscisses , du domaine A du plan compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations : x=0 et x=ln2.

Exercice 3 :

On définie pour tout entier naturel $n\geq 1$ l`intégrale $I_n=\int_0^2\frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$

1 / Calculer I_1

2 / Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$ on a : $0\leq I_n\leq\frac{2^n}{n!}(e^2-1)$

3 /A l`aide d`une intégration par parties montrer que pour tout entier n≥1 ; $I_{n+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

4 / Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geq 1$; $e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+.........+\frac{2^n}{n!}+I_n$

5 / On pose pour tout entier $n \geq 1$ $U_n = \dfrac{2^n}{n!}$

a / Calculer $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$; $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

b / En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$; $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$

c / En déduire la limite de la suite (U_n) puis celle de (I_n)

d / justifier que $e^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{2^n}{n!}\right)$

Exercice 4 :

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit h la fonction numérique à variable réelle définie sur]1 , +∞[par : $h(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

1°) Montrer que l'on a : $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{n-1}^{n+1} \dfrac{dx}{x} \leq \dfrac{1}{n-1}$.

2°) Démontrer l'égalité : $\displaystyle\int_{n-1}^{n+1} \dfrac{dx}{x} = \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$. En déduire que : $0 \leq h(n) \leq \dfrac{2}{n^2 - 1}$

3°)a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel élément de IR- {-1, 1} on a :
$\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

b) On pose : $S_n = \dfrac{2}{n^2-1} + \dfrac{2}{(n+1)^2-1} + \ldots + \dfrac{2}{(2n)^2-1}$. Simplifier l'expression de S_n

c) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.

4°)a) Déduire des résultats précédents que : $0 \leq h(n) + h(n+1) + \ldots + h(2n) \leq S_n$

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} \left(h(n) + h(n+1) + \ldots + h(2n)\right)$.

5°) Pour n ≥ 2, on pose, $u_n = \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1}$

a) Vérifier que : $h(n) + h(n+1) + \ldots + h(2n) = u_n - \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{2(2n+1)}{n-1}\right)$

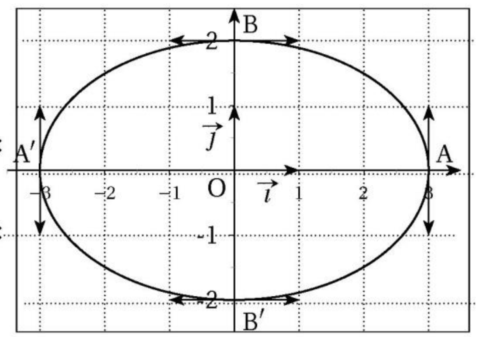
b) En déduire que la suite (U_n) admet une limite finie que l'on précisera.

Partie 06

Coniques

Exercice 1:

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.



1. La courbe dessinée ci-contre admet pour équation :

   a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

2. Un des foyers de l'ellipse est le point F de coordonnées :

   a) $F(0,\sqrt{13})$ b) $F(\sqrt{13},0)$ c) $F(\sqrt{5},0)$

3. Une des directrices de l'ellipse est la droite D d'équation :

   a) $x=\frac{4}{\sqrt{13}}$ b) $y=\frac{4}{9}$ c) $x=\frac{9}{\sqrt{5}}$

4. La parabole d'équation $y^2=-4x$ a pour foyer F de coordonnées :

   a) $(2, 0)$ **b)** $(0, 1)$ **c)** $(-1, 0)$

5. et a pour paramètre p égal à

   a) -2 **b)** 2 **c)** 4

Exercice 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A(1,0) et B(-1 , $\sqrt{3}$) ,B'(-1 , -$\sqrt{3}$) et A' (-1 , 0) . Soit (E) l'ellipse de centre A' et de sommets B , B' et passant par A .

1. Montrer que A est un sommet de (E).
2. Déterminer les foyers F et F' , l'excentricité **e** et les directrices associées (D) et (D') de (E).
3. Démontrer que (E) à pour équation cartésienne : $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$
4. Déterminer les points M_1 et M_2 d'intersection de (E) et l'axe des ordonnées. Tracer (E).
5. a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (E) en M_1 d'ordonnée positive.

   b) Soit H et H' les projetés orthogonaux respectivement des foyers F et F' sur (T). Montrer que FH. F'H'= 3

Exercice 3: Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la courbe (C) d'équation : $x^2-y^2-x-2=0$.

1. a) Prouver que (C) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.

   b) Tracer (C) et ses asymptotes.

2. Soit E le point de (C) d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.

   a) Ecrire une équation de la tangente (T) en E à (C).

b) La droite (T) coupe les asymptotes de (C) en G et H. Prouver que E est le milieu de [GH].

3. Calculer le volume, en unité de volume, engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AE}$ de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses où A est un sommet de (C).

Exercice n°4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère la courbe (H) d'équation $3x^2 - y^2 - 12 = 0$.

1) a. Montrer que (H) est une hyperbole ;

b. Préciser le foyer F d'abscisse positif et la directrice associée D.

2) Soit M_0 (x_0 , y_0) un point de (H) non situé sur l'axe focal de (H).

a. Déterminer une équation de la tangente (T) à (H) en M_0 .

b. Soit Q le point d'intersection de (T) et D.

Montrer que $\overrightarrow{FM_0}.\overrightarrow{FQ} = 0$.

3) a. Vérifier que le point B(4 , 6) appartient à (H).

b. A l'aide de la question 2) b. construire à la règle et au compas la tangente à (H) en B.

c. Construire (H) .

Exercice 5:

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère l'hyperbole (H) d'équation : $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par *M* le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\cos\theta}, 2\tan\theta\right)$ où θ un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. (a) Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de (H).

(b) Donner les équations cartésiennes des deux asymptotes (Δ_1) et (Δ_2).

(c) Tracer (H) et placer ses foyers.

(d) Vérifier que le point *M* appartient à (H).

2. Soit (*TM*) la tangente à (H) en *M*.

Montrer qu'une équation de (*TM*) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est : $2x - y\sin\theta - 2\cos\theta = 0$.

3. On désigne respectivement par P_1 et P_2 les points d'intersections de (TM) avec les droites (Δ_1) et (Δ_2).

a) Donner les coordonnées des points *P*1 et *P*2.

b) Montrer que l'aire du triangle OP_1P_2 est indépendante de θ.

Exercice 6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $O,\vec{i},\vec{j}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M(x,y) que $3(x+1)^2 + 4y^2 = 12$.

1) a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse dont on déterminera l'excentricité, ainsi que les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $O,\vec{i},\vec{j}$.

b) Construire $\mathcal{E}$.

2) Pour tout point M(x,y) de l'ellipse $\mathcal{E}$, on pose $z = x + iy$ l'affixe du point *M* .

a) Montrer que $|z| = \frac{1}{2}\ 3 - x$

b) Soit θ un argument de *z* , Montrer que $|z| = \frac{3}{2 + \cos\theta}$.

3) Soit M ' le point de $\mathcal{E}$ d'affixe z' tel que $\arg(z') \equiv \theta + \pi \ 2\pi$

a) Vérifier que $\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}} \equiv \pi \ 2\pi$

b) En déduire que MM'=$\dfrac{12}{4-\cos^2\theta}$

c) Déterminer θ pour que la distance MM ' soit minimale puis qu'elle soit maximale.

Partie 07

Fonctions : Ln et exp

Exercice 1 : choisir la réponse correcte

1) Soit I= $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$, alors I est égale à :

   a) 3 b) $\frac{1}{4}$ c) - $\frac{1}{4}$

2) Soit $l = \lim\limits_{x \to 1^-}\left[\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\right]$, alors

   a) $l = 1$ b) $l = 0$ c) $l = +\infty$

3) La limite de $(x+1+e^{-x})$ quand x tend vers $-\infty$ est égale à :

   a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$

4) Soit f la fonction définie sir IR par $f(x)=e^{2x}-1$, alors f est une solution de l'équation différentielle :

   a) 2y' = y+2 b) y'=2y+2 c) y'=-2y-2

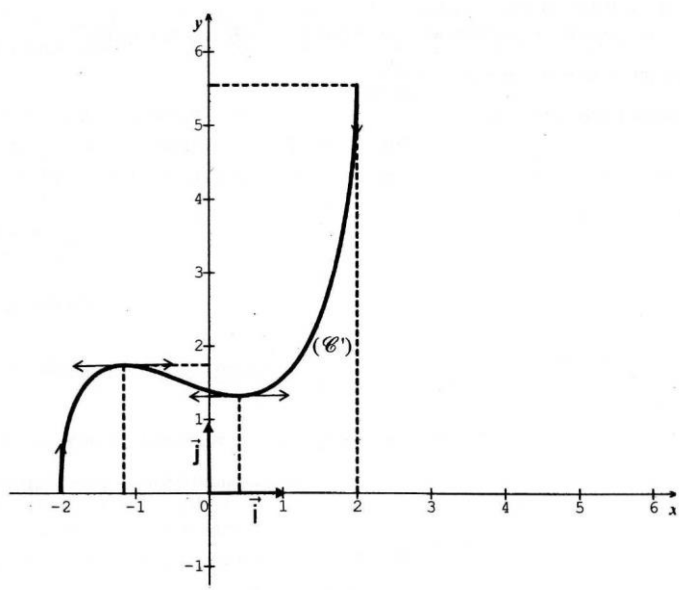
Exercice 2 (bac 2008 ctr) :

1) soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par $\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$

   et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

a) Montrer que f est continue à droite en (-2).
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2).
c) Donner le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $[-2,2]$ par g(x)=f(x)- $x\sqrt{4-x^2}$ et C' sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



a) Déterminer la position relative des courbes C et C'.
Ci dessous, on a tracé la courbe C' de g. Tracer la courbe C dans le même repère

3) Soit α un réel non nul de $[-2,2]$. On désigne par A
courbes C et C'et les droites d'équations respectives x=

a) Montrer que $A_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}$.(On distinguera

b) Calculer A_α .

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par

Exercice 3 :

1/ Soit g la fonction définie par : $g(x)= \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

a) Etudier les variation de g.

b) Montrer que $I(\ 0;\dfrac{1}{2})$ est un centre de symétrie de Cg.

c) Tracer C_g et la tangente T à la courbe C_g en I.

d) Déterminer A l'aire de la partie du plan limitée par C_g ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : x=0 et x=1.

2/ a) Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = (g(x))^2$

b) En déduire le volume V du solide de révolution engendrée par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe C_g autour de $(O,\vec{i})$ où A et B les points de C_g d'abscisses respectifs 0 et 1.

3/ Pour tout $n\in IN$, on pose $U_n=\int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

a) Montrer que la suite U est décroissante. En déduire que U est convergente.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$ on a: $U_n+U_{n+1}= \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

c) En déduire que pour tout $n\in IN^*$; on a : $\dfrac{1-e^{-n}}{2n} \le U_n \le \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

d) Déterminer alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4/ Pour tout $n\in IN^*$ et $x \in IR$, on pose $S_n= \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{-kx}$ et $V_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left((-1)^k \int_0^1 e^{-kx}dx\right)$

a) Exprimer S_n en fonction de n et x.

b) Montrer que $V_n=1-A+(-1)^{n+1}U_n$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}\left(1-e^{-k}\right)$

Exercice 4 (bac 2012 princ)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) : $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2 ; $\dfrac{1}{e}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k.

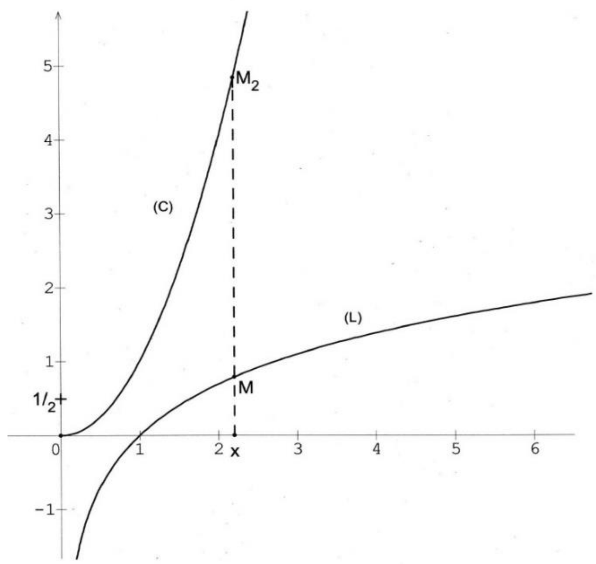
b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+\ln k}{k}$

c) Pour tout réel x > 0, on considère les points $M_k(x,x^k)$ et M (x,ln x).
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k=\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit A(1, 0) et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.



Exercice 5 :

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Déterminer f ' (x) et dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x)=e^{f(x)} & \text{si } x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

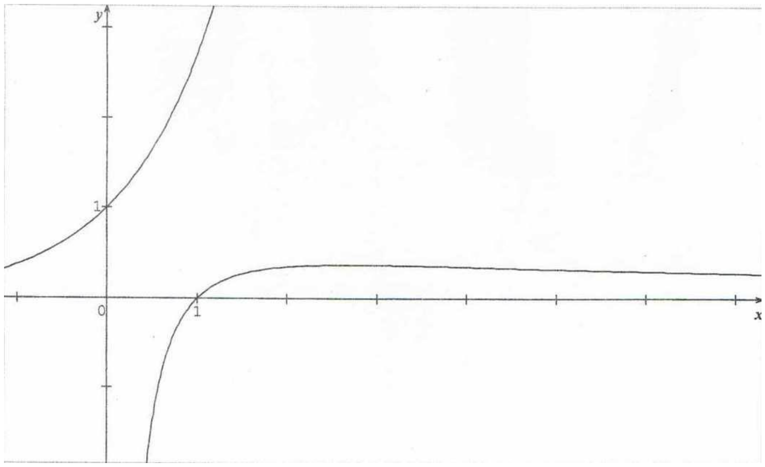
a) Montrer que g est continue à droite en 0.
b) Montrer que g est dérivable à droite en 0.
c) Dresser le tableau de variation de g.

3) Dans la Figure ci-dessous , on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ .La courbe de la fonction f et la courbe de la fonction exponentielle.

a) Construire le point A de coordonnées (e,g(e)).
b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe C_g de g au point d'abscisse 1
c) Tracer la courbe C_g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_n = g(n) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

a) Donner la limite de (U_n)
b) Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.



Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par f(x)=ln(1+tanx) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$.

b)Calculer f '(x) pour $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C).(On donne $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$)

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.(on rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$)

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe(C).

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par S1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations x = 0 et x = $\frac{\pi}{8}$ et on désigne par S2 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations x = $\frac{\pi}{8}$ et x = $\frac{\pi}{4}$.

a) Justifier que les surfaces S1 et S2 ont la même aire.

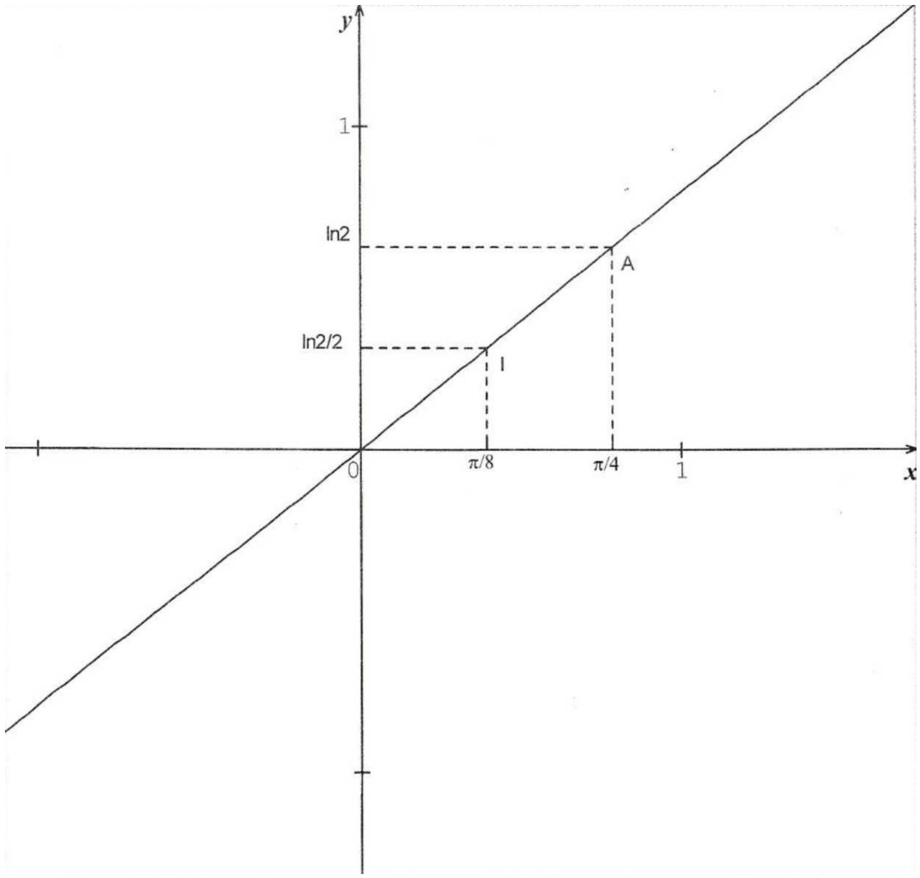
b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

On note f^{-1} la réciproque de f.

b)Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$pour x appartenant à J .

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}dx$.



Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur [0, ix[par f(x) = x - ln(1 + x²).

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$, f '(x)=$\frac{\left(x-1\right)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour x > 0, f(x) = x - 2lnx - $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}$ [f(x) - x], puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la droite Δ et la courbe (C).

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par G(x)= $\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; G(x)=x

c) Calculer alors $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

2) On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C),la droite Δ et les droites d'équations x= 0 et x= 1.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

a) En déduire la valeur de A..

Exercice 8 (bac 2010) :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$

et C_f sa courbe dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que $f'(x)=\frac{e^x\left(x^2-4x+6\right)}{x^4}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que la tangente Δ à C_f au point d'abscisse 2 a pour équation $y = \frac{e^2}{8}(x-2)$.

On se propose d'étudier la position relative de C_f et de sa tangente Δ.

3) Soit **g** la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$

On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0		2		3		$+\infty$
g(x)	$+\infty$	↘	$\frac{e^2}{8}$	↘	$\frac{e^3}{27}$	↗	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $g(x) = \frac{e^2}{8}$ admet dans $]3,+\infty[$ une solution unique α telle que $4{,}2 < \alpha < 4{,}3$.

b) Déduire la position relative de C_f et Δ.

4) Justifier l'existence sur $]0,+\infty[$ d'une primitive F de f telle que F(1) = e.

5) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe représentative C_F de la fonction F, la droite Δ et le rectangle ABCD tel que A(1, e) ; B(0, e) ; C(0, F(2)) et D (1, F(2)).

a) Etudier les branches infinies de C_f.

b) Tracer la courbe C_f dans l'annexe ci-jointe.

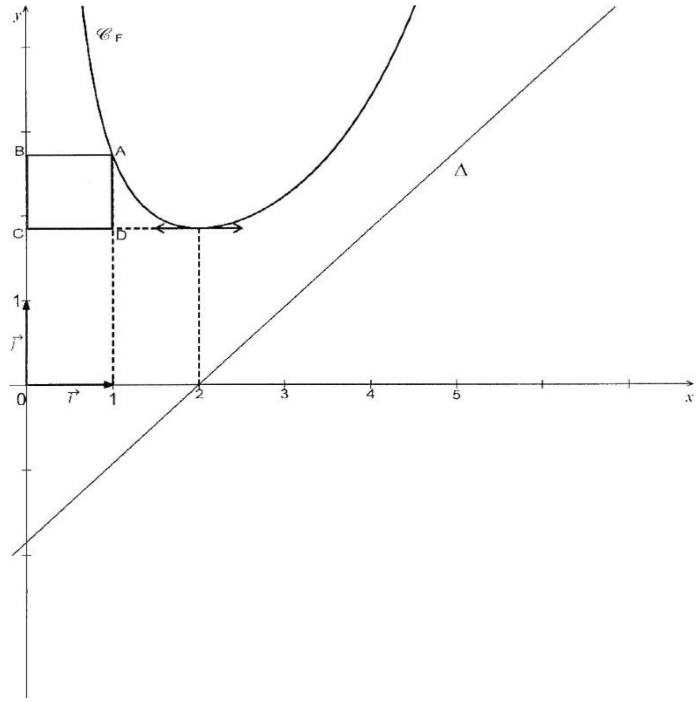
6) Soit $t \in [1, 2[$. On désigne par S(t) la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations x = t et x = 2. On désigne par ,A(t) l'aire de S(t).

a) Exprimer A(t) en fonction de F(t).

b) Hachurer S(1) et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD.

c) Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [1, 2[$ tel que $A(t_0)=\frac{1}{2}A(1)$

d) Construire le point de C_f d'abscisse t_0.



Exercice 9 :

1) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln x + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, C_g et C_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.

C_g et C_h se coupent en un point d'abscisse β .

a) Par une lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \dfrac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier la position relative des courbes , C_f et C_h

b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives Xi et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.

c) Placer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points A $(\beta , 0)$ et B$(0, \dfrac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta , f(\dfrac{1}{\beta}))$.

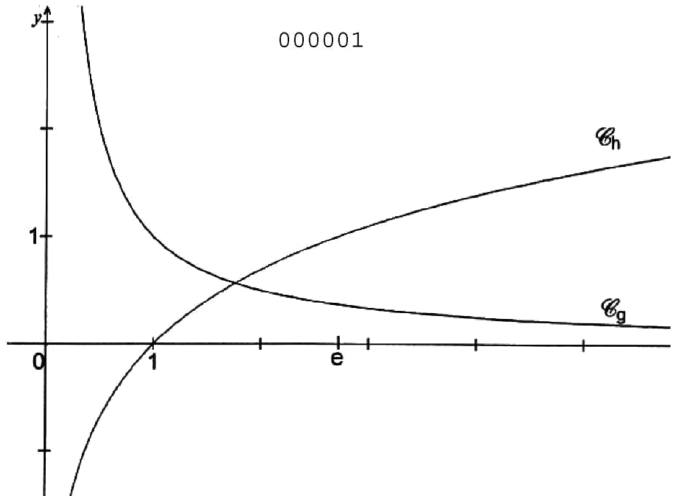
d) Tracer C_f.

4) Pour tout réel t de $]0,+\infty[\setminus\{\beta\}$ on désigne par A(t) l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes C_g et C_h et la droite d'équation x = t.

a) Montrer que pour tout réel $t \in]0,+\infty[\setminus\{\beta\}$; $A(t) = f(\beta)-f(t)$.

b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer S(to).

c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0,\beta\,[$ tel que $A\,(t_1)=A\,(t_0)$. Hachurer $S(t_1)$.



Exercice 10: Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I) 1/ Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$ et tracer la courbe C_f.

2/ a- Calculer $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{1} f(x)dx$ où $0<\alpha<1$.Interpréter graphiquement cette value

b- Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} A(\alpha)$.

I) 1) a- Justifier que pour tout $n\in IN^*$, on a : $\dfrac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}dx\le\dfrac{1}{n}$.

b- Vérifier que $\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{1}{n}-f(n)$.

c- En déduire que pour tout $n\in IN^*$; $0\le f(n)\le\dfrac{1}{n(n+1)}$.

2) On considère la suite (S_n) définie sur IN^* par

$$S_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{2n(2n+1)}$$

a- Montrer que pour tout $n\in IN^*$; $0\le\sum_{k=n}^{2n}f(k)\le S_n$

b- Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\in IR\setminus\{0,-1\}$, on a : $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$

c- En déduire que $S_n=\dfrac{n+1}{n(2n+1)}$. d-Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}f(k)$

3) On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par $U_n=\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dots\dots\dots\dots+\dfrac{1}{2n}$.

Vérifier que pour tout $n\in IN^*$; $\sum_{k=n}^{2n}f(k)=U_n-\ln(2+\dfrac{1}{n})$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur [0, l] par $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Dans l'annexe (II) on a représenté les courbe Γ_1 et Γ_2 d'équations respectives $y = e^x$ et $y=\ln x$

a. Déterminer les points d'intersection de C_f et Γ_1 .

b. Montrer que C_f est au dessus de Γ_1 .

c. Construire la demi-tangente à C_f au point d'abscisse 1.

d. Construire C_f.

4. On se propose de déterminer l'aire de la partie du plan limitée par C_f et Γ_1 .

a. Montrer que f réalise une bijection de [0, 1] sur un intervalle J à préciser.

b. Tracer C ' la courbe de la fonction réciproque de f.

c. Montrer que $f^{-1}(x) = \ln^3(x)$ pour tout $x \in J$.

d. Calculer $\int_1^e \ln^3 x\,dx$,pour $x\in J$

e. Conclure.

Exercice 1 2:

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\mathbf{f(x) = 1 + \ln^2(x)}$. On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté a un repère orthonormé .

1) Etudier f et tracer C

2) a) Soit $\alpha \in]0,1]$. Calculer, en fonction de α. l'aire $\boldsymbol{A(\alpha)}$ de la partie du plan $\{M(x,y)$ tel que $\alpha \le x \le 1$ et $0 \le y \le f(x)\}$

b) **Calculer** $\lim\limits_{\alpha\to0^+} A(\alpha)$

3) Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ **;** $\mathbf{n}\ge 2$ et $I_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt$, $1\le k\le n-1$

a) Montrer que pour tout n ≥ 2 **et** $1\le k\le n-1$, $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le I_k \le \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

b) En déduire que pour tout n ≥ 2 **,** $U_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq U_n - \frac{1}{n}f(1)$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\ln^2(n) + \ln^2\left(\frac{n}{2}\right) + \ln^2\left(\frac{n}{3}\right) + ... + \ln^2\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln^2(1)\right) = 2$

Exercice 13:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, par : $\begin{cases} x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Et C_f désigne la courbe représentative de f dans un repère

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f '(x) pour tout x de $]0,+\infty[$.

2) a) Dresser le tableau de variation de f', en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$.

b) Etudier les variations de f. En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$; $0 \leq f(x) < 1$.

c) Tracer C_f.

3) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $t - \ln(1+t) \leq \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, on a : $0 \leq 1 - f(x) < \frac{1}{2x}$

4) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{k+1} \leq \ln(1+k) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$

5) On considère les suites U et V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ et $V_n = \frac{n^n}{n!}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\ln(V_n) = - n\ln(U_n)$

b) Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

c) En déduire que pour tout , on a : $\ln(V_{n+1}) - \ln(V_n) = f(n)$

6) a) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq 1 + \ln(V_{n+1}) - V_{n+1} \leq \frac{1}{2n}$

b) En déduire que pour tout $0 \leq n - 1 - \ln(V_n) \leq \frac{1}{2}(1 + \ln n)$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(V_n) = 1$. En déduire que la suite (**Un**) converge vers $\frac{1}{e}$.

Exercice 14 :

I) Soit f la fonction définie sur $\begin{cases} f(x)=(1+x)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f a droite en 0

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Soit $\varphi(x)=1-(1+x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a $0\le\varphi'(x)\le x$

b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a $0\le\varphi(x)\le\frac{x^2}{2}$.

c) Etablir que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a $0\le x-f(x)\le\frac{1}{2x}$ .En déduire que C_f admet une asymptote oblique Δ. Préciser la position de C_f par rapport Δ et tracer C_f.

II) 1) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n+1}\le\ln(n+1)-\ln n\le\frac{1}{n}$

b) Soit $\alpha_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.........+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$

Montrer que $\ln(1+n)\le\alpha_n$ et par suite (α_n) est divergente .

2) Soient g(x)=$\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)$ et $V_n=\alpha_n-\ln(n)$

a) Etudier g et tracer sa courbe Γ .

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $V_n>0$.

c) Montrer que $V_{n+1}=V_n-g\left(\frac{1}{n}\right)$ .Etudier la monotonie de (V_n)

d) Montrer que (V_n) est convergente.

Exercice 15:

Soit *f* la fonction définie sur IR par : $f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}$.

A/ 1°) a) Montrer que *f* est dérivable sur IR et pour tout $x\in IR$, $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-f^2(x)\right)\ln 3$.

b) Montrer que *f* réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$.

2°) Construire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes représentatives $\mathbf{C}$ de *f* et $\mathbf{C}'$ celle de f^{-1}.

3°) Soit *h* la fonction définie sur IR par : $h(x)=2\frac{\left(\sqrt{3}\right)^x-1}{\left(\sqrt{3}\right)^x+1}$.

a) Montrer que la courbe de *h* se déduit de celle de *f* par une homothétie que l'on précisera.

b) Déduire que la courbe $\mathbf{C}'$ est l'image de celle de h par une similitude que l'on caractérisera.

B/ Soit un réel positif. On pose $I_0(x)=x$ et pour tout $n\in IN^*$ $I_n(x)=\int_0^x f^n(t)\,dt$.

1°) Calculer $I_1(x)$.

2°) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq I_n(x) \leq x\, f^n(x)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(x)$.

3°) a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_{n+2}(x) = I_n(x) - \dfrac{2}{(n+1)\ln 3} f^{n+1}(x)$.

b) Déduire que pour tout $n \geq 0$, $I_{2n}(x) = x - \dfrac{2}{\ln 3}\left[f(x) + \dfrac{1}{3} f^3(x) + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} f^{2n-1}(x) \right]$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3 \cdot 3^3} + \dfrac{1}{5 \cdot 3^5} \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)3^{2n-1}} \right]$.

Partie 08

Géométrie dans l'espace

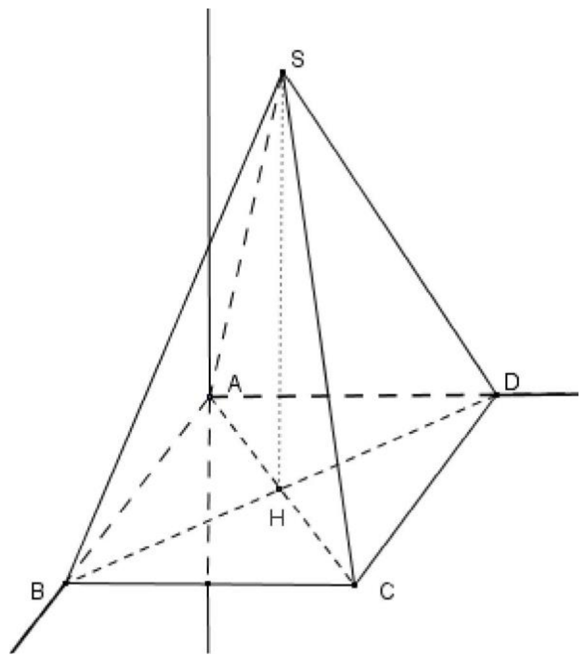
Exercice 1 : choisir la réponse correcte

SABCD est une pyramide de volume $V = \frac{243}{4}$ et dont la base ABCD est un carré d'arête $AB = \frac{9}{2}$

1. Soit H le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), la hauteur SH de la pyramide SABCD est :

a) 18 b) 9 c) $\frac{9}{2}$

2. Soit h l'homothétie de centre S et transformant A en M tel que M ∈ [SA] et $SA = \frac{3}{2} SM$.



Soit (Q) le plan parallèle au plan (ABC) passant par M. (Q) coupe respectivement les droites (SB) et (SC) en N et P . Le volume du tétraèdre SMNP est:

a) 9 b) $\frac{81}{4}$ c) $\frac{81}{6}$

3. L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ l'expression analytique d' une translation qui transforme le plan (ABC) en (MNP) est :

a) $\begin{cases} x' = x + \frac{3}{2} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \frac{3}{2} \\ z' = z \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + \frac{3}{2} \end{cases}$

Exercice 2:

L'espace (E) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit S l'ensemble des points M (x,y,z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

2) Soit $P_m : x + y + z - m = 0$, où m est un paramètre réel.

a. Etudier suivant les valeurs de m la position relative de P_m et S.

b-Montrer que P_1 et S sont sécants suivant à cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

Donner une équation cartésienne de la sphère S' de même rayon que(C) et contenant (C).

3) Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x, y, z) associe le M'(x',y',z') tel que : $\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 3 \\ z = -2z + 6 \end{cases}$

a. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre J et le rapport k.
b. Déterminer une équation cartésienne de f(S) et f(P_1).

Exercice 3 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit S l'ensemble des points M (x , y , z) tels que $\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2-2\mathbf{x}-2\mathbf{y}+1=0$ et P le plan : 2x +2y – z – 3 = 0

1°/ a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre $\boldsymbol{\Omega}$ est le rayon R.

b) Montrer que P coupe S suivant un cercle ζ que l'on caractérisera.

2°/ Soit t la translation de vecteur $\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{i}}-2\,\vec{\mathbf{j}}$

a) Ecrire une équation cartésienne du plan P' = $\mathbf{t}_{\vec{u}}\left(\mathbf{P}\right)$. b) Montrer que P ' est tangent à S.

3°/ Soit I (1 , 1 , 1) et h l'homothétie de centre I et rapport - 2.

a) Montrer que h (P) = P .

b) Déterminer le centre et le rayon de la sphère S' image de S par h . caractériser alors S'$\cap$**P**

Exercice 4 : L'espace est rapporte a un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; on considère les points $A(0,0,1);B(1,0,1)$; $C(2,1,-1)\,et\ I(-2,1,2)$

1) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A , B et C déterminent un plan P dont on déterminera une équation cartésienne
b) Calculer l'aire du triangle ABC .
c) Calculer $d\left(C,(AB)\right)$ la distance du point C a la droite (AB)

2) a) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}$, En déduire que les points A , B , I et C déterminent un tétraèdre

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCI , en déduire $d\left(I,P\right)$ la distance entre I et P

3) Soit S la sphère de centre I et passant par A . Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle (C) que l'on caractérisera.

4) Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $k=\dfrac{1}{5}$

a)Déterminer S' l'image de S par h

b) Déterminer les coordonnées du point $A'=h(A)$

c) Déterminer P' l'image de P par h

d) Montrer que $S'\cap P'$ est un cercle (C') que l'on caractérisera

Exercice 5 : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1,3,2) , B(1,-1,-2) et C(2,4 ,1).

1) a) montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : 2x-y+z-1=0.
2) Soit S la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2z-4=0$.
a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.

b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC)suivant le cercle Γ de diamètre $[AB]$

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle Γ.

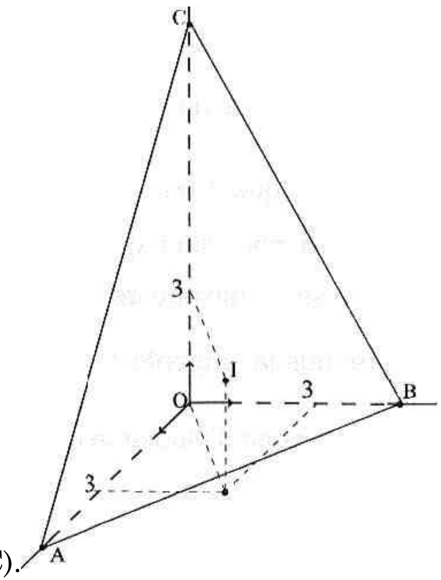
3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

a) Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle Γ'.

c) Montrer que (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

<u>Exercice 6 :</u>



Soit $\left(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace .Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre tel que : $\overrightarrow{OA}=5\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=5\vec{v}$, $\overrightarrow{OC}=10\vec{w}$

I est le point de coordonnées (3,3,3).

1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation

2x + 2y + z- 10 = 0 .

2) Soit S la sphère de centre 1 et de rayon 3.

a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?

b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).

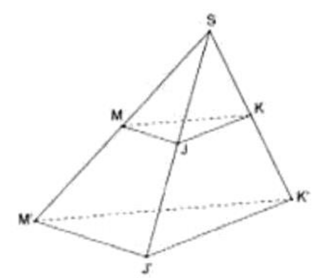
3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

On désigne par S', la sphère image de S par h.

a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).

b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).

<u>Exercice 7</u>: (bac 2013)



L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

On considère les points I(1.1,0) , J(0.1,1) et K(1.0.-1).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$.

b) En déduire que les points I, J et K déterminent un plan P dont une équation est x - y + z = 0.

2) Soit le point S(1.-1,1). Montrer que le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.

3) Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ .

a) Montrer que $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$.

b) Déterminer alors le volume du tétraèdre SMJK.

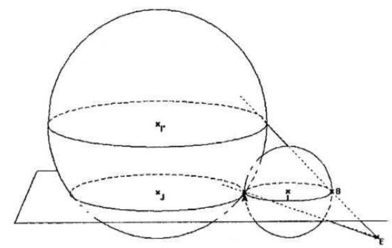
4) Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.

a) Déterminer une équation du plan P' image du plan P par h.

b) Le plan P' coupe les demi-droites [SM) ; [S J) et [S K) respectivement en M ', J 'et K '.

Montrer que le volume du solide MJKM'J'K' est égal à $\frac{7}{2}$

<u>Exercice 8 (bac 2015 ctr) :</u>



Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace .

On considère les points A(-2,3,2) et B(2,3,2) et l'ensemble S des points M(x,y,z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$.

1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.

b) Montrer que [AB] est un diamètre de S .

2) Soit P le plan d'équation z = 2 et soit J (-6,3,2).

a) Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle Γ de diamètre [AB].

b) Dans le plan P on considère le cercle Γ' de centre J et de rayon 4.

Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A .

3) Soit E le point de coordonnées (4,3,0) .

On considère l'homothétie h de centre E de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h.

a) Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I'.

b) Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle Γ'.

c)La droite (EA) recoupe S' en A ' . Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S .

Montrer que les points E , B et B' sont alignés.

Exercice 9 :

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On donne les points $A(0,1,1)$, $B(1,3,3)$ et $C(-3,-2,1)$.

1°) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. En déduire une mesure en radian de $\widehat{BAC}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis donner une équation cartésienne du plan $P=(ABC)$.

c)Déterminer le volume **v** du tétraèdre $OABC$.

2°) Soit t l'application de ξ dans ξ qui à tout point M associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}$.

a) Montrer que t est une translation de vecteur $\vec{u}=-\vec{j}+\vec{k}$.

b) Donner les expressions analytiques de t. En déduire les coordonnées du point $A'=t(A)$.

3°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de ξ tel que : $x^2+y^2+z^2-2y-2z-7=0$.

a) Montrer que (S) est une sphère dont-on précisera le centre I et le rayon R .

b) Montrer que $S'=t(S)$ coupe $P=(ABC)$ suivant un cercle (**c**) dont-on précisera le centre H et le rayon r.